

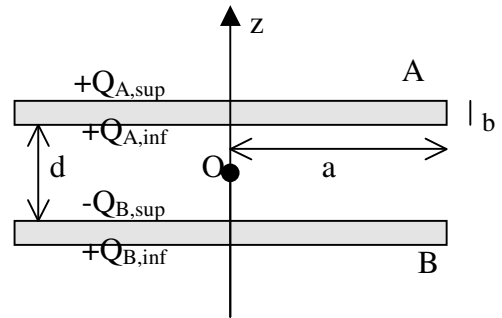
### Esercizio n.9

Due piastre conduttrici di forma circolare (raggio  $a$ , spessore  $b$ ) sono poste con i propri centri su uno stesso asse  $z$  perpendicolare ad entrambe a distanza  $d$  l'una dall'altra ( $b, d \ll a$ ). Una sezione, non in scala, del sistema è riportata in figura. Le due piastre sono inizialmente scariche.

Ad un dato istante la piastra A viene caricata con una carica elettrica  $+Q$  (una certa carica viene di conseguenza indotta sulla piastra B).

Assumendo che le cariche elettriche si distribuiscano uniformemente sulle superfici inferiore e superiore di ciascuna piastra, si calcoli

- le cariche  $Q_{A,sup}$ ,  $Q_{A,inf}$ ,  $Q_{B,sup}$  e  $Q_{B,inf}$  sulle superfici inferiore e superiore di ciascuna piastra
- il campo elettrico (modulo direzione e verso) nel punto O dell'asse  $z$  equidistante dalle due piastre
- la ddp  $V_{AB}$  tra le piastre
- la forza totale (direzione, verso e modulo) agente sulla piastra A



(Suggerimenti: Essendo  $b, d \ll a$  le due piastre possono essere considerate di estensione infinita. Il campo elettrico all'interno di una qualsiasi delle due piastre conduttrici, ad esempio A, è 0.)

### Soluzione

Poiché  $b, d \ll a$ , le piastre possono essere considerate come di estensione infinita e ci si trova in condizioni di induzione completa.

Valgono le seguenti relazioni:

$$Q_{A,inf} = -Q_{B,sup} \quad (\text{induzione elettrostatica})$$

$$Q_{A,sup} + Q_{A,inf} = Q$$

$$Q_{B,sup} + Q_{B,inf} = 0$$

La quarta equazione necessaria per determinare  $Q_{A,sup}$ ,  $Q_{A,inf}$ ,  $Q_{B,sup}$  e  $Q_{B,inf}$  si ottiene imponendo che il campo elettrico all'interno di una qualsiasi delle due piastre conduttrici, ad esempio A, è 0. Tale campo è la somma dei campi generati dalle distribuzioni piane  $Q_{A,sup}$ ,  $Q_{A,inf}$ ,  $Q_{B,sup}$  e  $Q_{B,inf}$ , che generano campi uniformi diretti lungo l'asse  $z$ . Il campo risultante lungo l'asse  $z$  all'interno del conduttore A è

$$E_A = \frac{1}{\pi \cdot a^2} \left[ \frac{Q_{A,sup}}{2\epsilon_0} + \frac{Q_{A,inf}}{2\epsilon_0} + \frac{Q_{B,sup}}{2\epsilon_0} + \frac{Q_{B,inf}}{2\epsilon_0} \right] = 0$$

Dalle 4 equazioni di scritte si ricava

$$\begin{cases} Q_{A,sup} = \frac{Q}{2} \\ Q_{A,inf} = \frac{Q}{2} \\ Q_{B,sup} = -\frac{Q}{2} \\ Q_{B,inf} = \frac{Q}{2} \end{cases}$$

Per calcolare la ddp tra A e B occorre calcolare il campo elettrico tra le due piastre. Tale campo è diretto come l'asse  $z$ , ha verso opposto ad esso e ha modulo:

$$E_z = \frac{Q_{A,inf}}{\epsilon_0 \pi a^2} = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi a^2} \quad (\text{Teorema di Coulomb})$$

Di conseguenza

$$V_{AB} = -(-E_z d) = -\left(-\frac{Q}{2\epsilon_0 \pi a^2} d\right) = \frac{Qd}{2\epsilon_0 \pi a^2}$$

La forza risultante sulla piastra A è la somma delle forze agenti su ciascuna superficie (entrambe sono dirette in senso uscente dalle superfici):

$$F_A = \frac{Q_{A,\text{sup}}^2}{2\varepsilon_o\pi a^2} - \frac{Q_{A,\text{inf}}^2}{2\varepsilon_o\pi a^2} = 0$$